

Mesure et incertitude de mesure

Comment être certain de l'incertitude ?

Jean-Marie SEYNHAEVE

- La mesure et l'incertitude de mesure - Principes
- Les modèles de « fitting » - La régression
- L'instrument de mesure - L'étalonnage et son utilisation
- La traçabilité - Chaîne continue et ramifiée - Dégradation de l'information
- Contrainte dans l'information - Multiplicateurs de Lagrange
- Références et remerciements



La mesure et l'incertitude de mesure - Principes

Référence : Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure - 1995

Agréé par :

BIPM	Bureau international des poids et mesures
CEI	Commission électrotechnique internationale
FICC	Fédération internationale de chimie clinique
ISO	International standard organization
OIML	Organisation internationale de métrologie légale
UICPA	Union internationale de chimie pure et appliquée
UIPPA	Union internationale de physique pure et appliquée

Incertitude de mesure = doute sur la validité d'un mesurage
Incertitude \neq Erreur

Rappel : distribution normale, distribution de Student

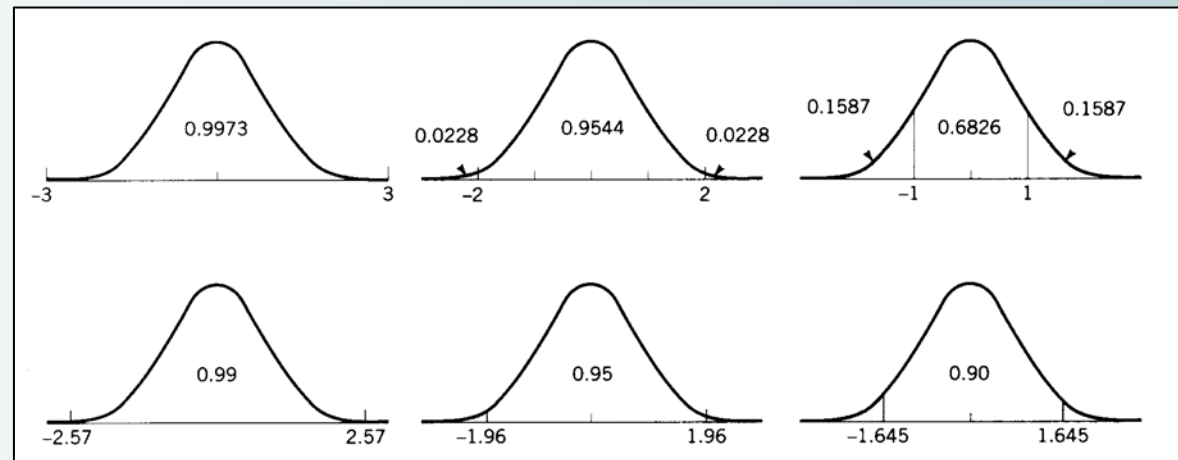
Curiosité mathématique !

- Soit une variable aléatoire x supposée connue et définie par :

Valeur moyenne $\bar{x} \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)$

Variance $V(x) \triangleq \sigma^2 \triangleq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}{n} \right)$

- Distribution normale si $f(x) = \frac{1}{\sigma(2\pi)^{0.5}} \exp\left(\frac{(x - \bar{x})^2}{-2\sigma^2}\right)$





• **Fonction Gamma :**

$$\Gamma(q) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{q-1} dx$$

\Rightarrow Propriétés de la fonction Gamma :

• Récurrence :

$$\Gamma(q) = q\Gamma(q-1)$$

pour tout q

• Cas particulier : si q entier alors $\Gamma(q) \rightarrow$

fonction factorielle

• Valeurs particulières :

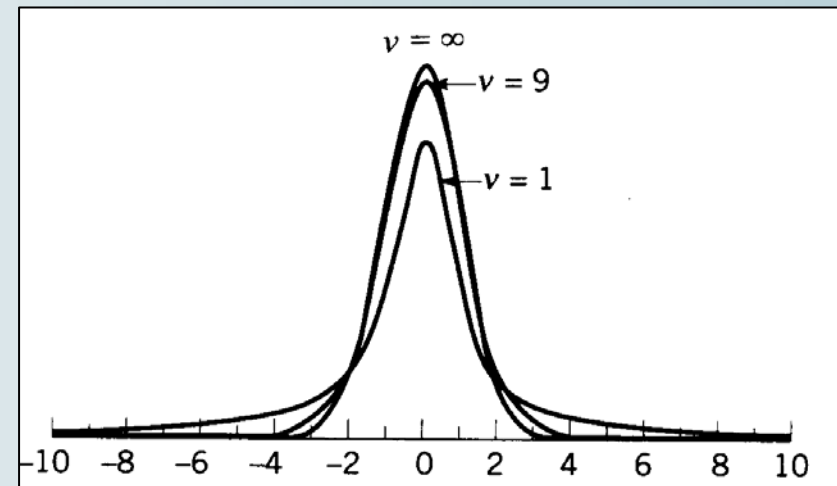
$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(1) = 1$$

• **Distribution de Student**

$$f_{\nu}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\pi\nu}} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

ν : nombre de degrés de liberté



Si $\nu \rightarrow \infty$: Distribution de Student \rightarrow Distribution normale



1. Incertitude de mesure du type A

- Soit une grandeur q qui varie au hasard : q est une **variable aléatoire**
- Soit n observations **indépendantes** q_k obtenues dans les **mêmes conditions** de mesure

⇒ Meilleure estimation de q :

$$\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n q_k$$

⇒ Estimation de l'écart-type :

$$s(q_k) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})^2}$$

⇒ Ecart-type expérimental de la moyenne :

$$s(\bar{q}) = \frac{s(q_k)}{\sqrt{n}}$$

⇒ Incertitude élargie de type A :

$$U(q) = k \cdot s(\bar{q})$$

avec

$$k = 2$$

Incertitude à niveau de confiance de 95 %



Commentaires

⇒ Nombre de degré de liberté :

$$v = n - 1$$

⇒ Coefficient de Student à 95 % :

$$k \triangleq t_{95} = f(v)$$

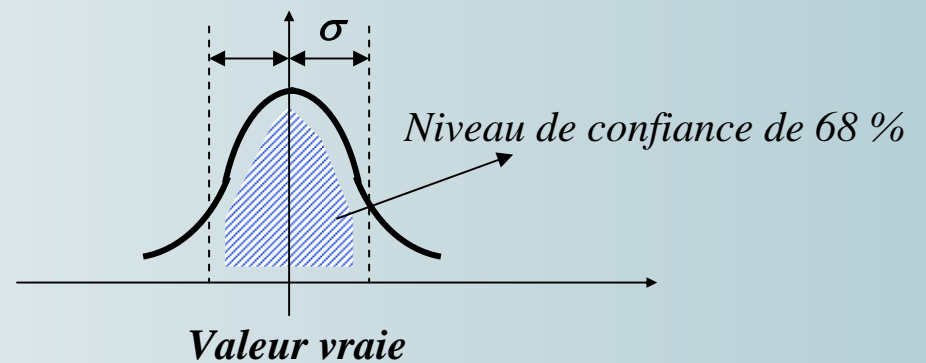
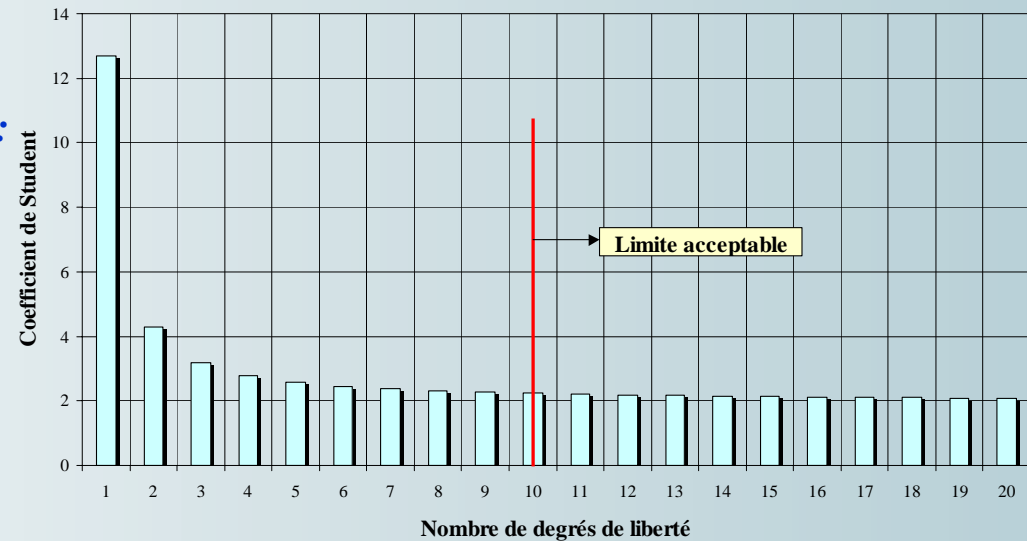
⇒ Si $v \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \bar{q} &\rightarrow \text{Valeur vraie} \\ s(\bar{q}) \text{ et } U(\bar{q}) &\rightarrow 0 \\ s(q_k) &\rightarrow \sigma \\ t_{95} &\rightarrow 1.956 \end{aligned}$$

⇒ Conséquences :

$$\begin{aligned} \text{Si } \sigma \nearrow &\Rightarrow v \nearrow \\ \text{Valeur recommandée : } &v > 10 \end{aligned}$$

Coefficient de Student correspondant à un niveau de confiance de 95 %



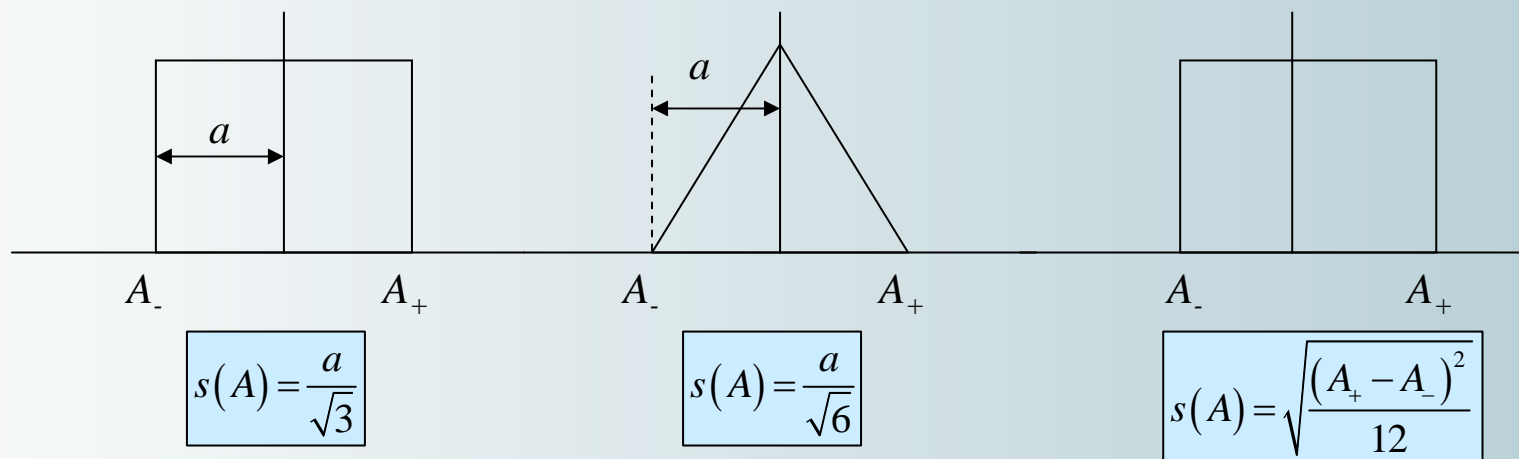
2. Incertitude de mesure du type B

Pas d'observations répétées et indépendantes disponibles \Rightarrow incertitude type B

\Rightarrow Évaluation fondée sur toutes informations disponibles :

- Résultats de mesures antérieures
- Expérience ou la connaissance générale
- Spécification du fabricant
- Données fournies par des certificats d'étalonnage
- Incertitudes assignées à des valeurs de référence ...

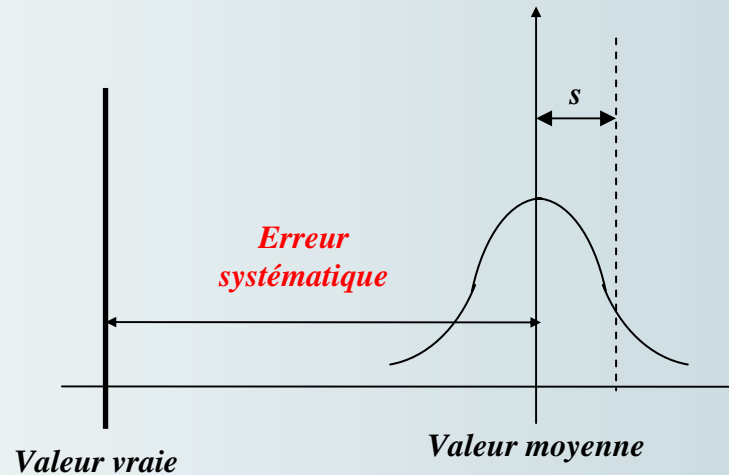
\Rightarrow Exemple de distributions ... :



Justification : « théorème central limite » ...



3. Erreurs systématiques et corrections



⇒ Évaluation de la grandeur q :

$$q = \bar{q} - e_{\text{sys}} \pm t_{95}(v) s(\bar{q})$$

$$s(\bar{q}) = \frac{s(q_k)}{\sqrt{n}}$$

NB : l'erreur systématique est estimée et comporte une composante aléatoire

⇒ Exemples :

- Correction de la colonne d'émergence d'un thermomètre.
- Mesure de pression : correction de la colonne de fluide $\rho g \Delta H$
- Dissipation de chaleur par effet Joule pour les PT100.
- etc..



4. Détermination de l'incertitude -type composée

⇒ Soit la grandeur F fonction de n grandeurs x_i **indépendantes** ($s(x_i)$ connus)

$$F = F(x_i)$$

⇒ Coefficients de sensibilité :

$$c_i \triangleq \frac{\partial(F(x_i))}{\partial x_i}$$

⇒ Écart-type composé :

$$s(F) = \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2 s(x_i)^2}$$

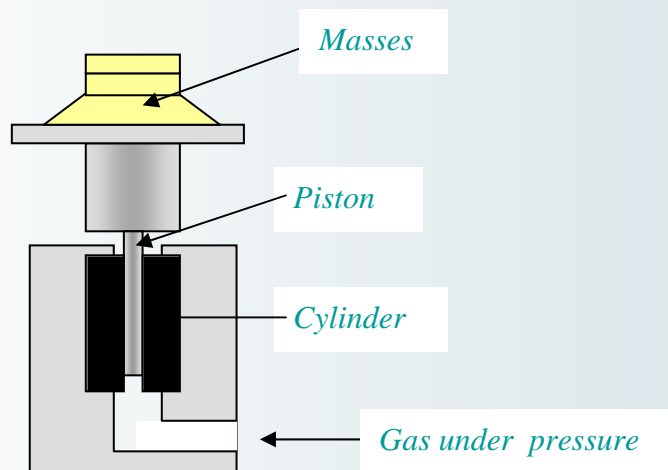
⇒ Erreur systématique composée :

$$e_{\text{sys}}(F) = \sum_{i=1}^n c_i e_{\text{sys}}(x_i)$$

⇒ Incertitude-type composée de F : $F = F(x_i) - e_{\text{sys}}(F) \pm t_{95}(v) s(F)$

**NB : Théorie basée sur les séries de Taylor du premier ordre de F
⇒ Non linéarité de F ?**

5. Exemple de présentation de résultats : Balance manométrique



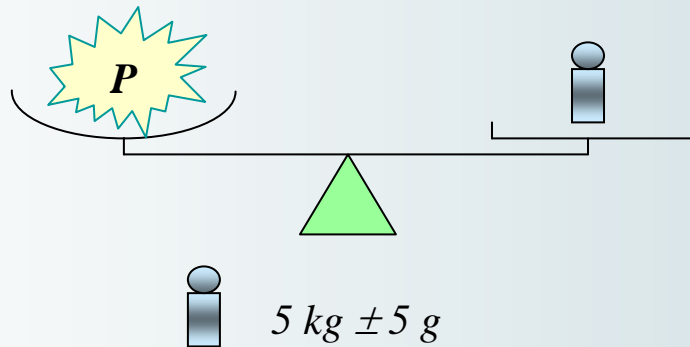
$$P = \frac{M_c g \left(1 - \frac{\rho_{0,a}}{\rho_{0,m}} + \frac{\rho_{0,a} - \rho_a}{\rho_m}\right) + \sigma C}{S_{20} \left[1 + (\alpha_p + \alpha_c)(t - 20)\right] (1 + LP)}$$

Pressure (bar)	139.1317
Expanded uncertainty 2k (bar)	0.0042
Relative expanded uncertainty 2k	3.01E-05

<i>Quantity</i>	<i>Units</i>	<i>Value</i>	<i>Standard Uncertainty</i>	<i>Sensitivity Coefficient</i>	<i>Contribution to Standard Uncertainty</i>
<i>M</i>	kg	69.5349771	3.81E-05	2.00E+05	7.6
<i>g</i>	m/s ²	9.81139778	0.00000002	1.42E+06	0.0
<i>ρ_{0a}</i>	kg/m ³	1.2	-	-	-
<i>ρ_{0m}</i>	kg/m ³	8000	-	-	-
<i>ρ_a</i>	kg/m ³	1.16178	2.71E-03	-1.76E+03	-4.8
<i>ρ_m</i>	kg/m ³	7920	39.5	-8.48E-03	-0.3
<i>σ</i>	N/m	3.10E-02	3.10E-03	5.06E+02	1.6
<i>C</i>	m	0.024821354	5.926E-08	6.32E+02	0.0
<i>S</i>	m ²	4.902765E-05	7.354E-10	-2.84E+11	-208.7
<i>α_p + α_c</i>	1/°C	9.00E-06	4.50E-07	-1.39E+07	-6.3
<i>t</i>	°C	21	0.1	-1.25E+02	-12.5
<i>L</i>	1/Pa	1.01E-13	-	-	-
<i>P</i>	Pa	13913168	-	-	209

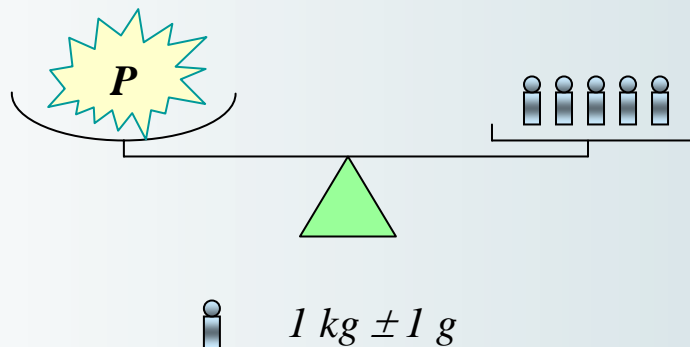


Exemple simple



⇒ Résultat de mesure :

$$P = 5 \text{ kg} \pm 5 \text{ g}$$



⇒ Résultat de mesure :

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5$$

$$c_{i=1\dots 5} = 1$$

$$s(P) = \sqrt{\sum_{i=1}^5 s(P_i)^2} = \sqrt{5 \cdot (0.5)^2} = 1.12 \text{ g}$$

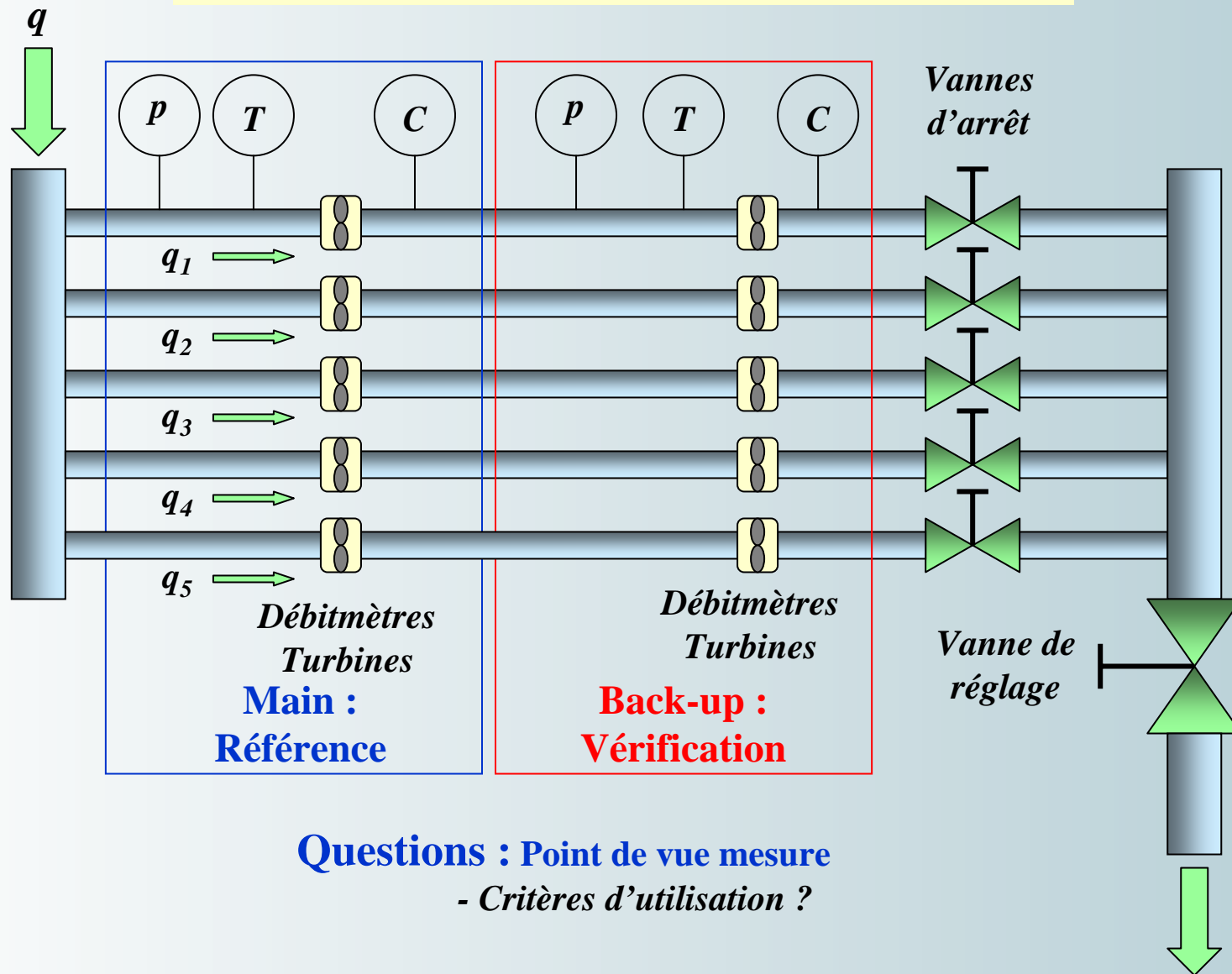
$$P = 5 \text{ kg} \pm 2.24 \text{ g}$$

Conséquences :

- Multipliez vos sources d'informations
- Vérifiez la vraisemblance des informations
- Vérifiez l'indépendance de vos sources



Cas d'étude : station de comptage de gaz naturel





- **Détermination du débit :**

$$q = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5$$

- **Incertitude sur le débit :**

Si $q_1 \cong q_2 \cong q_3 \cong q_4 \cong q_5 \Rightarrow U(q_i) \triangleq U(q_1) \cong U(q_2) \cong U(q_3) \cong U(q_4) \cong U(q_5)$

On obtient :
$$\Delta q = \frac{\sum_{i=1}^5 U(q_i)}{\sqrt{n}}$$
 où n est le nombre de ligne en fonctionnement

- **Si Main = Back-up : $2n$ mesures indépendantes**

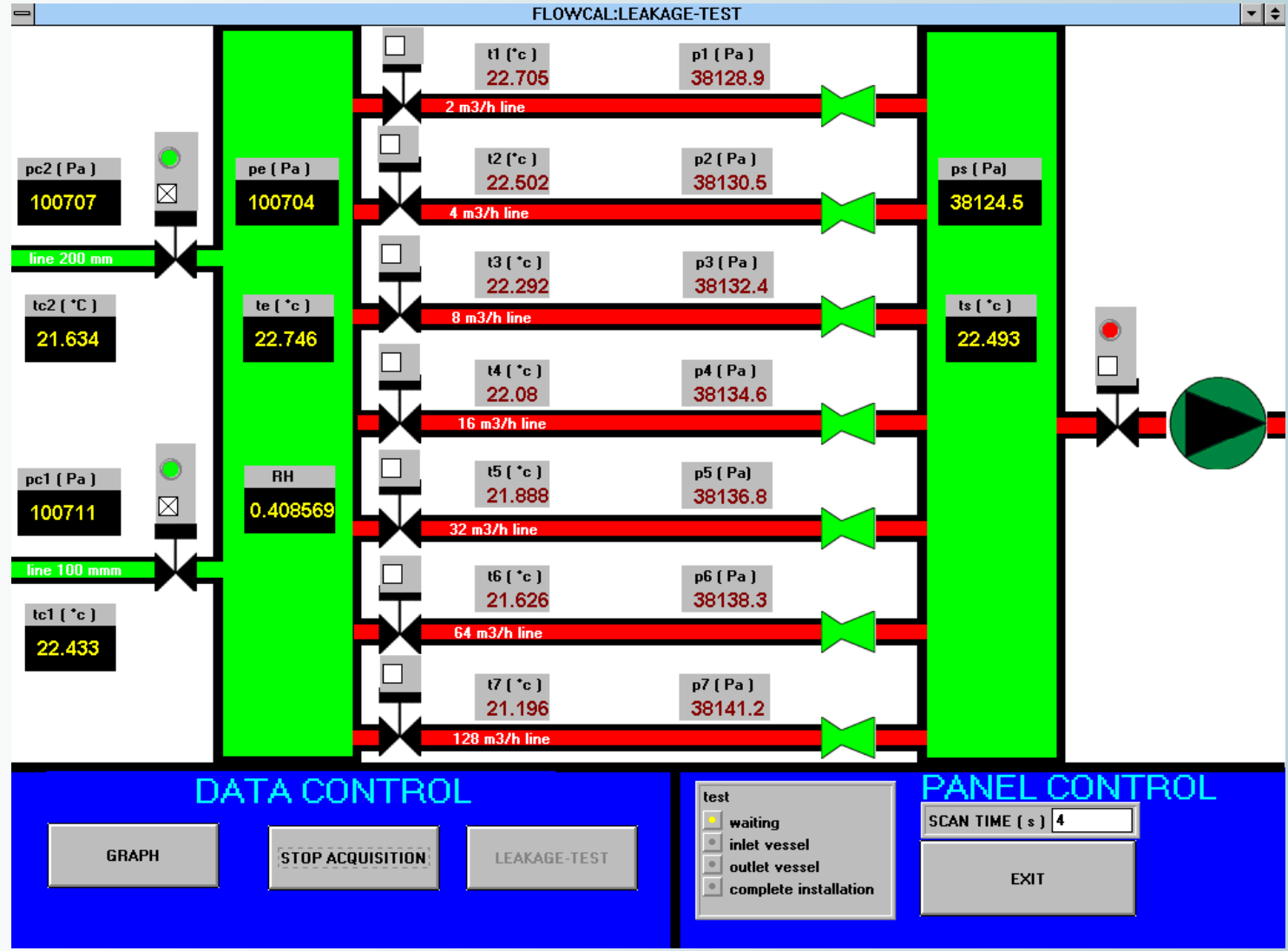
- Incertitude sur q_i :
$$q_i' = \frac{q_{i,\text{main}} + q_{i,\text{back-up}}}{2}$$
 et
$$U(q_i') \cong \frac{U(q_i)}{\sqrt{2}}$$

- Incertitude sur q :
$$\Delta q = \frac{\sum_{i=1}^5 U(q_i)}{\sqrt{2n}} \Rightarrow \text{diminution de l'incertitude de } +/- 30 \%$$

- Information supplémentaire :
$$q_{i,\text{main}} = q_{i,\text{back-up}}$$

\Rightarrow Estimation sous contraintes par multiplicateurs de Lagrange

Cas d'étude : Installation d'étalonnage de compteurs à gaz





- Détermination du débit à travers une tuyère

$$Q_{v,i} = (1 + 0.169x_v) \sqrt{\frac{T_i}{293.15}} \left[1 + c_i^* (P_i - 100000) \right] Q_{20,dry,1000,i}$$

Nozzle Number	Diameter of Nozzle (mm)	$Q_{20,dry,1000,i}$ (m ³ /h)	Correction coefficient c_i^* (Pa ⁻¹)
1	2.0021	2.1909	$2.3 \cdot 10^{-7}$
2	2.7249	4.0884	$1.4 \cdot 10^{-7}$
3	3.8504	8.1860	$1.3 \cdot 10^{-7}$
4	5.3881	16.0543	$1.0 \cdot 10^{-7}$
5	7.6216	32.218	$1.7 \cdot 10^{-7}$
6	10.7107	63.780	$1.4 \cdot 10^{-7}$
7	15.1357	127.474	$9.1 \cdot 10^{-8}$

- Détermination de l'incertitude sur le débit à travers une tuyère

$$U(Q_{v,i}) = \left[\left(\frac{\partial Q_{v,i}}{\partial x_v} \right)^2 U(x_v^2)^2 + \left(\frac{\partial Q_{v,i}}{\partial T_i} \right)^2 U(T_i)^2 + \left(\frac{\partial Q_{v,i}}{\partial c_i^*} \right)^2 U(c_i^*)^2 + \left(\frac{\partial Q_{v,i}}{\partial P_i} \right)^2 U(P_i)^2 + \left(\frac{\partial Q_{v,i}}{\partial Q_{20,dry,1000,i}} \right)^2 U(Q_{20,dry,1000,i})^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

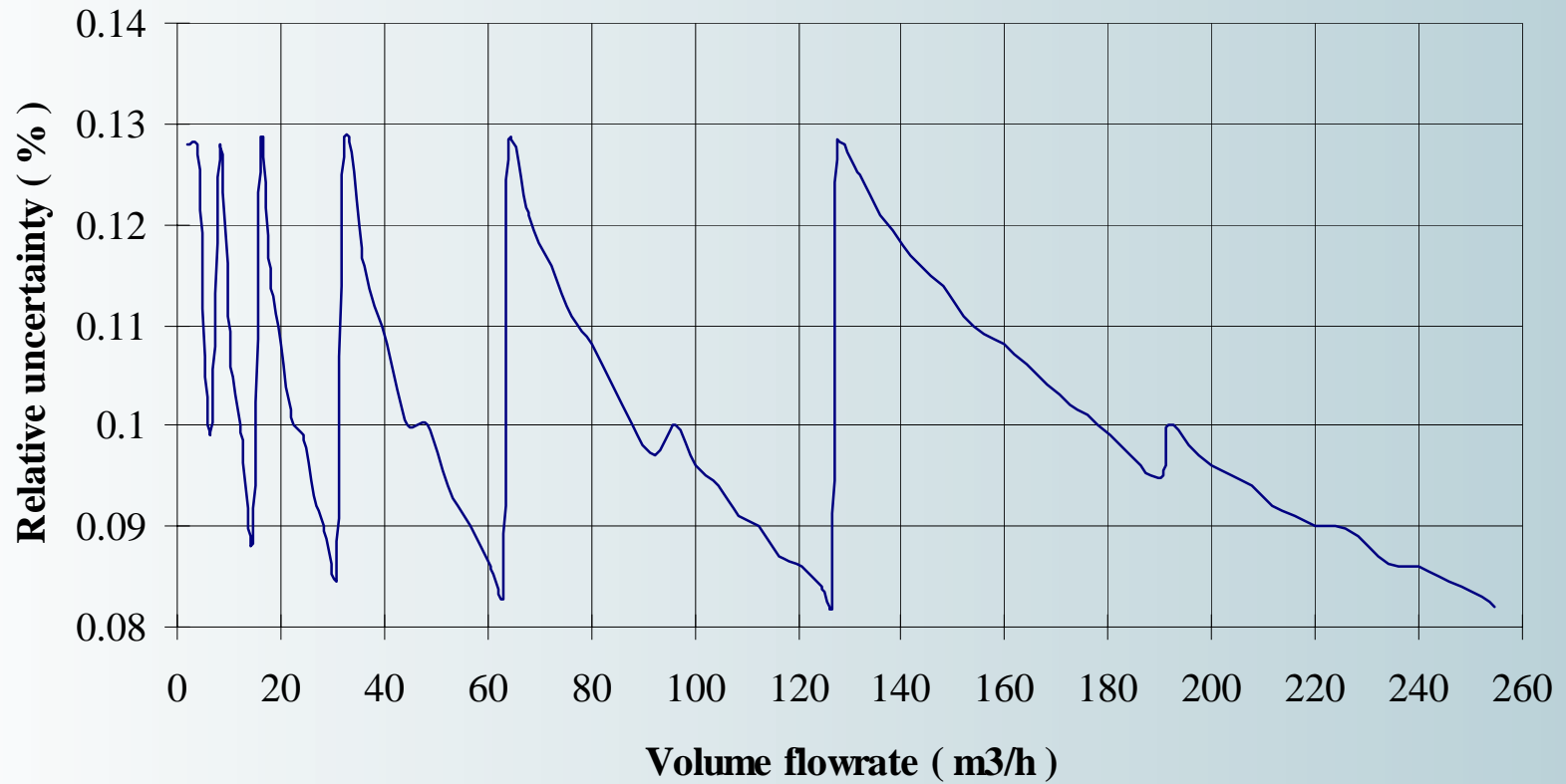
- Débit total et incertitude globale

$$Q_v = \sum_{i=1}^n Q_{v,i}$$

$$U(Q_v) = \sqrt{\sum_{i=1}^n U(Q_{v,i})^2}$$



Relative uncertainty for a 95 % confidence level



Les modèles de «fitting» - La regression

Méthodologie générale

- Soit n observations **indépendantes** d'un ensemble de variables (grandeurs)

⇒ k variables prédictives : *indépendantes et supposées exactes* x^1, x^2, \dots, x^k

⇒ 1 (ou plus) variable de réponse : y
supposée dépendante des x_i
comportant une composante aléatoire pour chaque ensemble des x_i

⇒ L 'observation i (1 à n) : $x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^k$ et y_i

Exemples :

⇒ $QI = f(\text{poids})$:

2 mesures de QI pour une même personne ou 1 mesure de QI pour deux personnes ?

⇒ *Corrélation de transfert de chaleur : Nu (y) → Re (x^1) et Pr (x^2)*



• **Le modèle de « fitting »**

⇒ *Choix « judicieux » d'une fonction :* $\hat{y} = f(x^1, \dots, x^k, C_1, \dots, C_m)$

Avec m constantes C_i à déterminer Exemple : $Nu = f(\text{Re}(\lambda), \text{Pr}, C_i)$

⇒ *Choix « judicieux » du modèle d'incertitude sur y :* $U(y) = k \cdot f(x^1, \dots, x^k)$

Choix difficile - importance de bien connaître le phénomène ...

• **Methodologie des « moindres carrés »**

⇒ *Fonction à minimiser :* $F = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\hat{y}_i - y_i}{U(y_i)} \right)^2$ Les $U(y_i)$ sont les poids

⇒ *Détermination des m constantes C_i :* m équations $\frac{\partial F}{\partial C_i} = 0$

⇒ *Nombre de degrés de liberté :* $\nu = n - m$ ⇒ *Validité « statistique » :* $\nu > 0 \rightarrow \nu \geq 10$

⇒ *Ecart type résiduel et incertitude résiduelle :* $s_r \triangleq \sqrt{\sum \varepsilon_i^2 / \nu}$ $U_r = t_{95} s_r$

⇒ *Incetitude sur le modèle :* $s(C_i)$ et $U(C_i) \triangleq t_{95} s(C_i)$

Erreur (biais) du modèle



Régression polynomiale - Regression linéaire à variables multiples

• Le modèle de «fitting»

⇒ *Choix de la fonction :*

$$\hat{y} = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_mx^m$$

⇒ *Modèle d'incertitude :*

$$U(y) = k$$

• Methodologie des «moindres carrés»

⇒ *Fonction à minimiser :*

$$F = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2$$

⇒ *Détermination des $m+1$ constantes A_i :*

$$\begin{pmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 & \dots \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \dots \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \\ \dots \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & \dots \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & \dots \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \\ \dots \end{pmatrix}$$

$[C_{ij}]$ est la matrice inverse

⇒ *Nombre de degrés de liberté :*

$$\nu = n - (m + 1)$$

⇒ *Ecart type résiduel et incertitude résiduelle :*

$$s_r = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 / \nu}$$

$$U_r = t_{95}(\nu) s_r$$

⇒ *Incertitude sur les coefficients A_i :*

$$s(A_0) = \sqrt{s_r^2 C_{00}}$$

$$s(A_1) = \sqrt{s_r^2 C_{11}}$$

$$s(A_2) = \sqrt{s_r^2 C_{22}}$$

...

⇒ *Test de validité « statistique » des coefficients A_i :*

$$\left| \frac{A_m}{s(A_m)} \right| \geq t_{95}$$

⇒ *Ecart type et incertitude sur une valeur prédite quelconque $\hat{y}_0 = f(x_0, x_0^2, \dots, x_0^m)$:*

$$s(\hat{y}_0) = s_r \sqrt{\sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m C_{jk} x_0^j x_0^k}$$

⇒ *Coefficient R^2 :*

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$



Exemple : Etalonnage d'un capteur de pression

No	X (I)	U(X)	Y(Pref)	U(Y)	Polynome du 1er degré			Polynome du 2ième degré		
					Y est.	U(Yest.)	U global	Y est.	U(Yest.)	U global
	<i>mA</i>	<i>mA</i>	<i>bar</i>	<i>bar</i>	<i>bar</i>	<i>bar</i>	<i>bar</i>	<i>bar</i>	<i>bar</i>	<i>bar</i>
1	7.996617	8.00E-05	20.0004	0.0007	19.9980	0.0025	0.0026	19.9995	0.0032	0.0033
2	8.996359	9.00E-05	24.9986	0.0009	24.9966	0.0022	0.0024	24.9974	0.0024	0.0026
3	9.997176	1.00E-04	30.0006	0.0011	30.0006	0.0020	0.0023	30.0007	0.0018	0.0022
4	10.99765	1.10E-04	35.0007	0.0012	35.0028	0.0018	0.0022	35.0025	0.0017	0.0022
5	11.99811	1.20E-04	40.0008	0.0014	40.0050	0.0016	0.0022	40.0043	0.0017	0.0023
6	12.99706	1.30E-04	44.9988	0.0016	44.9996	0.0015	0.0022	44.9987	0.0018	0.0025
7	13.99723	1.40E-04	49.9989	0.0017	50.0003	0.0014	0.0024	49.9994	0.0019	0.0027
8	14.99632	1.50E-04	54.9990	0.0019	54.9957	0.0015	0.0025	54.9948	0.0018	0.0028
9	15.99681	1.60E-04	59.9971	0.0021	59.9980	0.0016	0.0027	59.9973	0.0017	0.0028
10	16.99686	1.70E-04	64.9992	0.0023	64.9981	0.0018	0.0030	64.9978	0.0017	0.0030
11	17.99729	1.80E-04	69.9993	0.0024	70.0001	0.0020	0.0033	70.0003	0.0018	0.0032
12	18.99682	1.90E-04	74.9992	0.0026	74.9977	0.0022	0.0036	74.9984	0.0024	0.0037
13	19.99715	2.00E-04	79.9993	0.0028	79.9992	0.0025	0.0039	80.0007	0.0032	0.0044

⇒ *Diagnostic* :

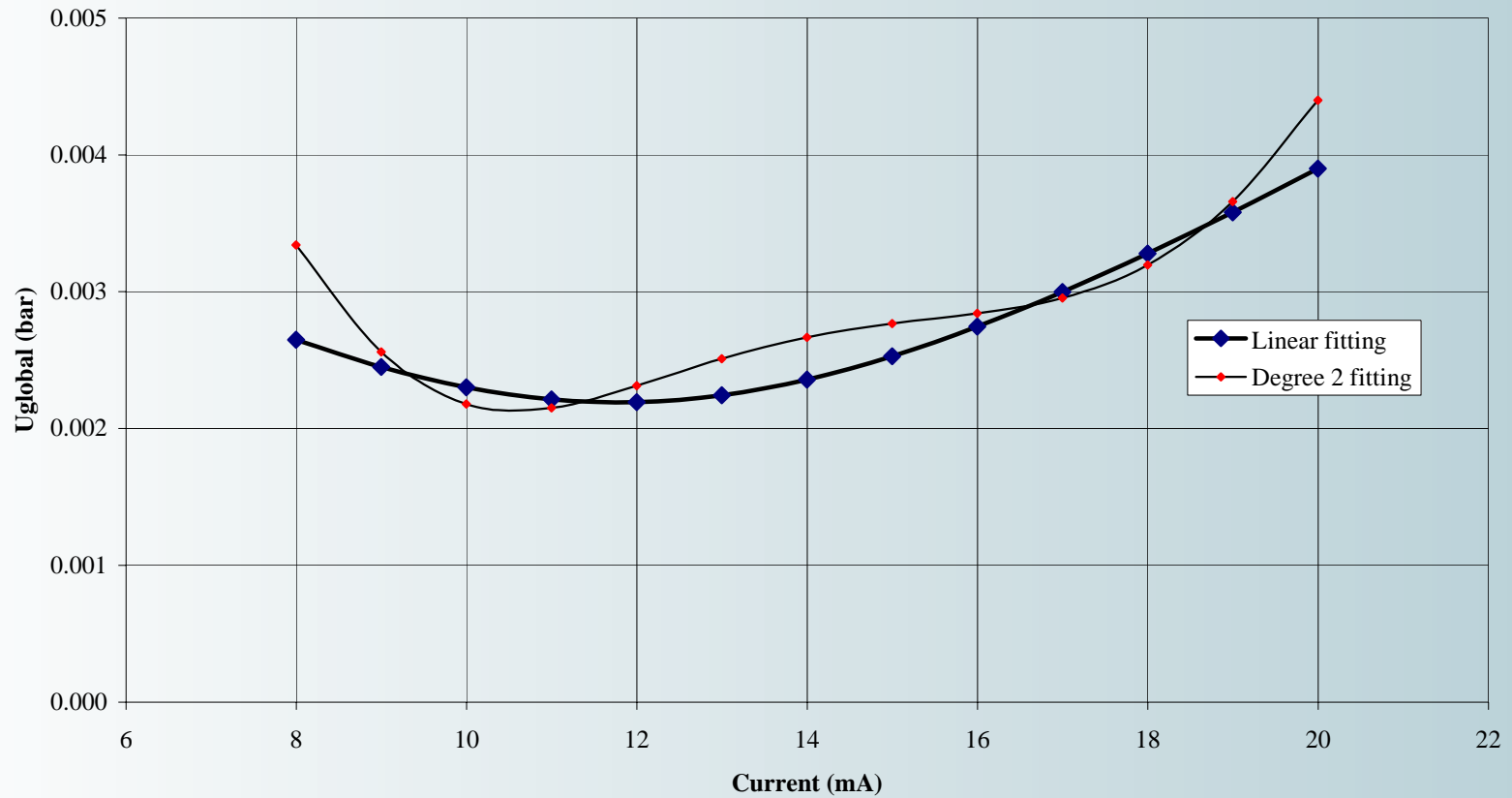
Relative expanded uncertainty on X				1.00E-05
Relative expanded uncertainty on Y				3.50E-05
Linear regression $P(\text{bar}) = A0 + A1 * I$				
Degree	Ai	s(Ai)	Test	Test result
0	-19.9841	0.00228969	8728	+
1	4.99988	0.00015804	31638	+
Degree of freedom				11
Standard deviation on linear fitting (bar)				0.0021
t coefficient for 95 % confidence level				2.202
R ² coefficient of regression				0.999999989

Relative expanded uncertainty on X				1.00E-05
Relative expanded uncertainty on Y				3.50E-05
Fitting degree 2 $P(\text{bar}) = A0 + A1 * I + A2 * I^2$				
Degree	Ai	s(Ai)	Test	test result
0	-1.99718E+01	8.5099E-03	2346.90	+
1	4.99800E+00	1.2750E-03	3920.09	+
2	6.71703E-05	4.5228E-05	1.49	-
Degree of freedom				10
Standard deviation on curve fitting (bar)				0.0020
Student coefficient for 95 % confidence level				2.229





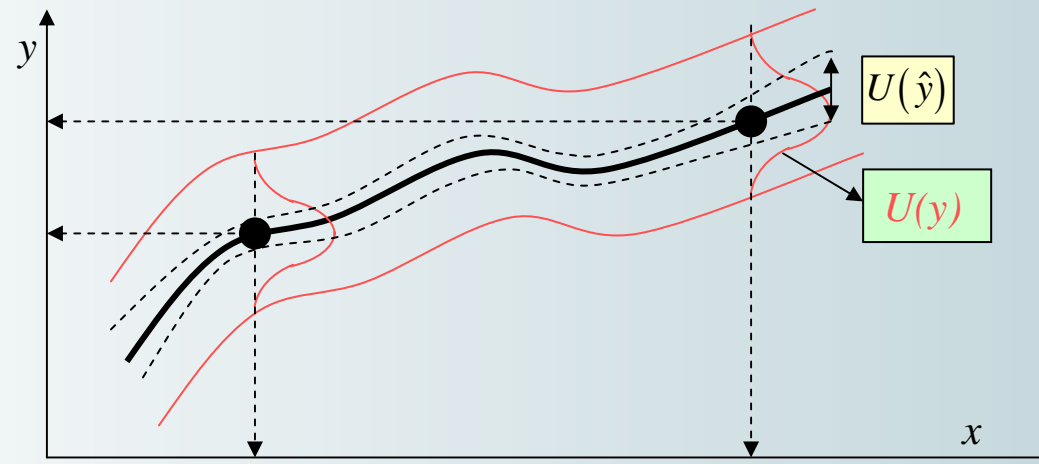
Example of Global Uncertainty on the fitting model



Commentaires sur la régression linéaire à variables multiples

⇒ *Modèle d'incertitude ? :*

$$U(y) = k$$



$U(y)$ est constant quelque soit x

$U(\hat{y})$ diminue si x augmente : niveau de confiance au modèle

⇒ *Vérification du modèle d'incertitude :*

$$U(y) = k \cdot f(x)?$$

Divers tests possibles (Durbin-Watson) - Détermination du « biais » du modèle



Cas particulier : Régression linéaire passant par l'origine

⇒ Test de validité « statistique » des coefficients A_i :

$$\left| \frac{A_1}{s(A_1)} \right| \geq t_{95}(v) \quad \left| \frac{A_{i \neq 1}}{s(A_{i \neq 1})} \right| \leq t_{95}(v)$$

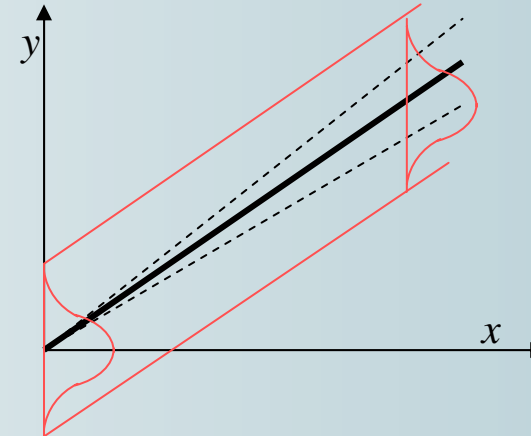
• **Modèle 1 : $U(y) = k$**

$$A_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$$s_r = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-1}}$$

$$s(A_1) = \frac{s_r}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}}$$

$$s(\hat{y}_0) = s_r \sqrt{\frac{x_0^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}} = \text{abs}(x_0) s(A_1)$$

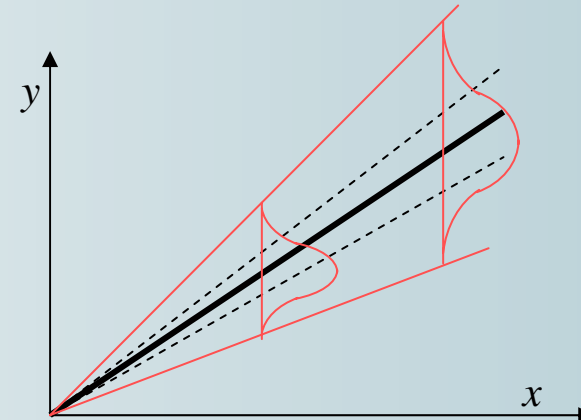


• **Modèle 2 : $U(y) = k \cdot x$**

$$A_1 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n x_i}$$

$$s(A_1) = \frac{s\left(\frac{y_i}{x_i}\right)}{\sqrt{n}}$$

$$s(\hat{y}_0) = \text{abs}(x_0) s(A_1)$$

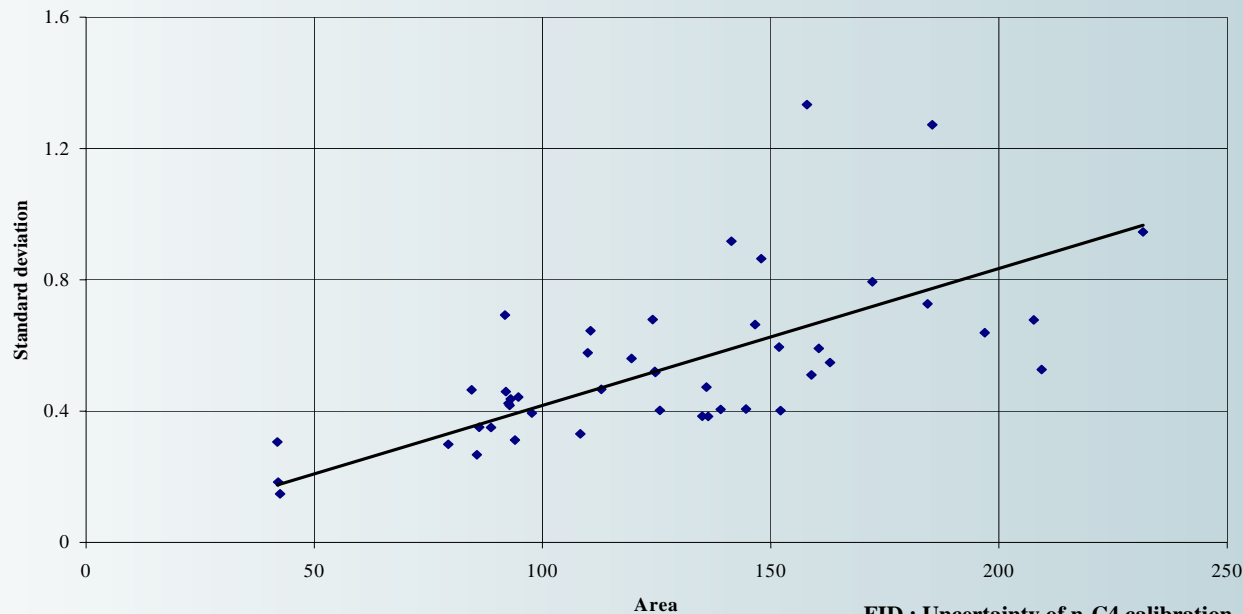


• **Modèle général : $U(y) = k \cdot f(x)$** Ex : transducteur - dérive du zéro + stabilité du gain



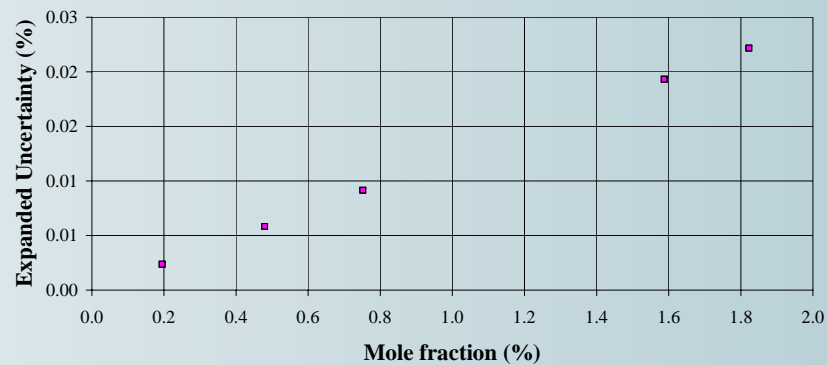
Exemple Modèle 2 - Etalonnage d'un chromatographe

Standard deviation on Area for n-C4



FID : Uncertainty of n-C4 calibration
Chromatograph HP12000

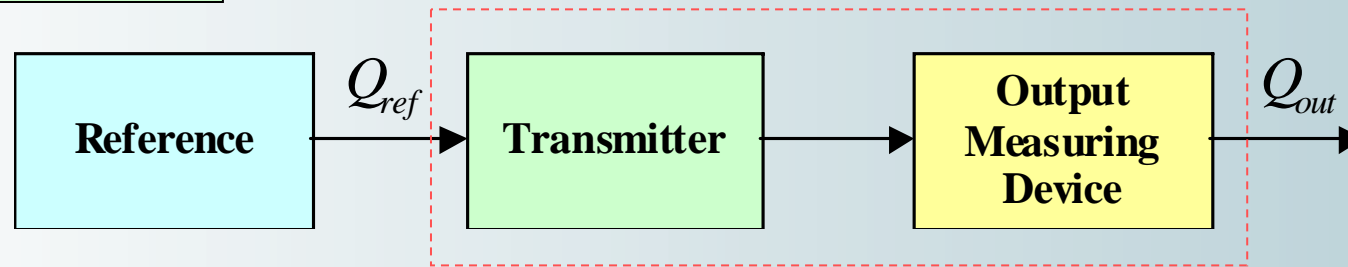
Expanded Uncertainty on X (%)			$U(X)=C1*X+C2$	
C1	3.15E-04	C2	6.11E-05	
Linear regression			$Area = A1*[n-C4](\%)$	
Degree	A_i	$s(A_i)$	Test	Test result
1	643.730	3.65	176.29	+
Degree of freedom				14
t coefficient for 95 % confidence level				2.145
R^2 coefficient of regression				0.999315





L'instrument de mesure - Etalonnage et utilisation

• L'étalonnage



Q_{ref} Grandeur physique de référence

Q_{out} Signal du transducteur

⇒ Choix du modèle de « fitting » :

• $Q_{ref} = f(Q_{out})$ ou $Q_{out} = f(Q_{ref})$? ⇒ **Comparez $U(Q_{ref})$ et $U(Q_{mes})$**

Exemples : étalonnage des sondes thermométriques, étalonnage des balances

• Quel modèle ? ⇒

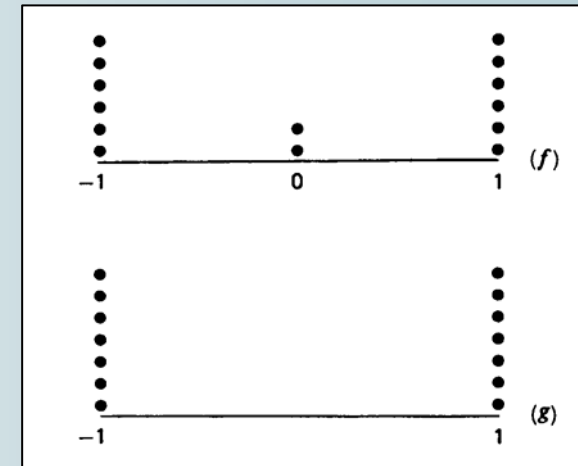
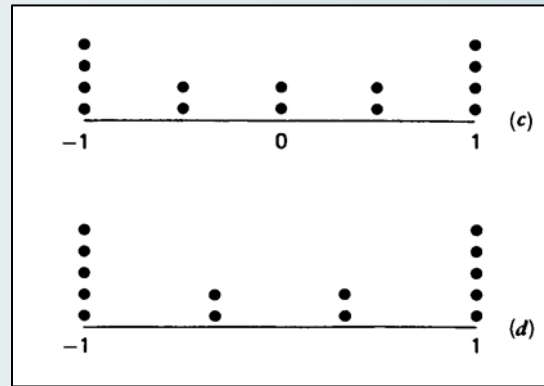
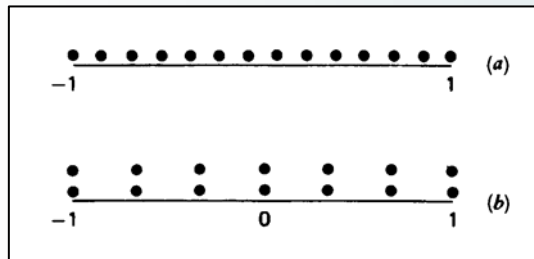
Choix de la fonction : linéaire ou autre - Pertinence statistique

Choix du bon modèle d'incertitude $U(y) = k f(x)$? : test Durbin-Watson



⇒ *Choix de la plage d'étalonnage : Plage d'utilisation du transducteur*

⇒ *Choix des points d'étalonnage : Plans expérimentaux à niveaux multiples*



Eliminez a, b et g - Choisissez entre c,d ou f

Caractère aléatoire du choix

⇒ *Interprétation des résultats*

Interprétez l'incertitude sur la fonction du modèle

A-t-on une bonne connaissance de $U(y)$ - Correspond-elle au modèle initial



• **L'utilisation**

⇒ *Régression directe ou inverse ? :*

directe $\hat{Q}_{ref} = f(Q_{out})$

inverse $\hat{Q}_{out} = f(Q_{ref})$

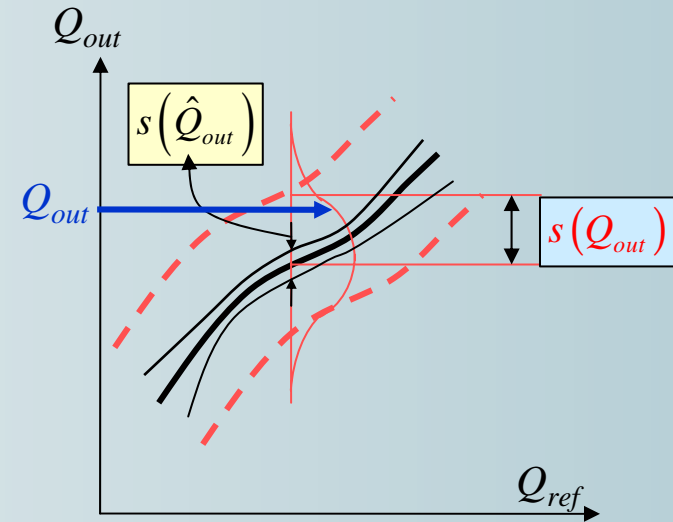
⇒ *Soit q observations indépendantes de Q_{out} pour une régression inverse*

Incertitude sur le « fitting » $U(\hat{Q}_{out}) = t_{95}(v) s(\hat{Q}_{out})$

Incertitude sur l'observation $U(Q_{out}) = t_{95} s(Q_{out}) / \sqrt{q}$

Incertitude sur l'appareil de mesure $U(Q_{mes})$

Incertitude sur Q_{ref} $U(Q_{ref})$



Incertitude globale $U(Q) = \sqrt{c^2 [U(\hat{Q}_{out})^2 + U(Q_{out})^2 + U(Q_{mes})^2] + U(Q_{ref})^2}$

$$c \triangleq 1 / \frac{d\hat{Q}_{out}}{dQ_{ref}}$$



La traçabilité - Chaîne continue ramifiée

Exemple : La mesure du $PC_{i \text{ ou } s}$ d'un gaz naturel

Toutes mesures doivent être traçables vis-à-vis des références primaires

*Préparation des mélanges
« gravimétriques »*

ISO 6142

*Étalonnage du
chromatographe*

ISO 6975

*Détermination du
Pouvoir Calorifique*

ISO 6975

Préparation des mélanges « gravimétriques »

ISO 6142

Références primaires

Gaz «parent»

Parent gas : Nitrogen N2 - N57		
Component	Mole fraction	St. deviation
	x 10 ⁻⁶	x 10 ⁻⁶
H2	0.05	0.03
CH4		
H2O	0.5	0.29
CO	0.25	0.14
N2	999998.75	0.36
C2H4		
C2H6		
O2	0.25	0.14
Ar		
CO2	0.1	0.06
C3H6		
C3H8		
C4H10 n		
CnHm	0.1	0.06
C4H10 i		
Autre 2		
Autre 3		

Masses de référence

Reference masses and uncertainties		
Reference Mass	Mass (g)	U(mass)
10	10	0.000060
20A	20	0.000080
20B	20	0.000080
10 + 20A	30	0.000100
20A + 20B	40	0.000113
50	50	0.000100
50 + 10	60	0.000117
50 + 20A	70	0.000128
50 + 10 + 20A	80	0.000141
50 + 20A + 20B	90	0.000131
100	100	0.000150

Masses molaires

Atome	Atomic weight kg/kmole	Standard Uncertainty kg/kmole
H	1.00794	0.00007
C	12.011	0.001
N	14.00674	0.00007
O	15.9994	0.0003
Ar	39.948	0.001

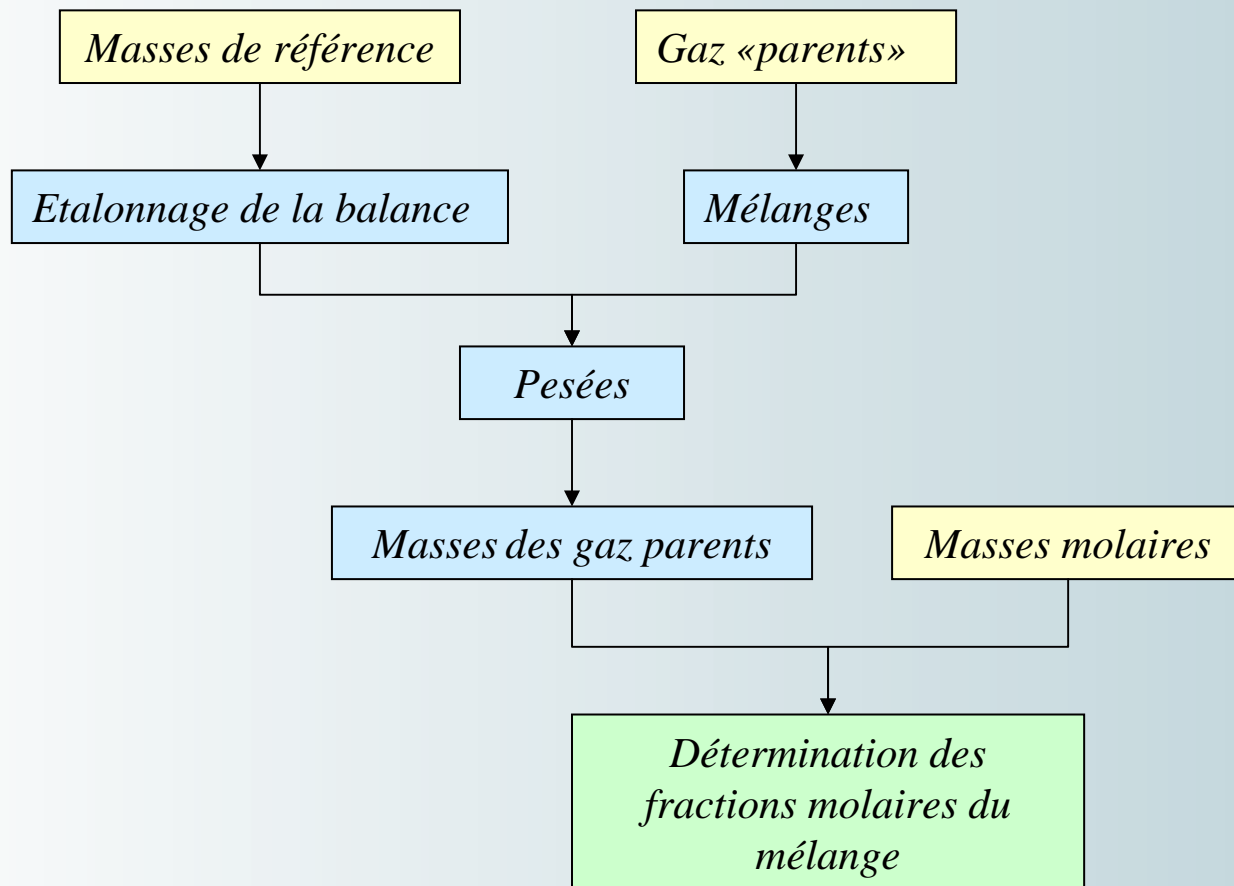
IUPAC Commission on Atomic Weights (1993)



*Préparation des mélanges
« gravimétriques »*

ISO 6142

Chaîne ramifiée





Préparation des mélanges

« gravimétriques »

ISO 6142

Résultats

<i>Component</i>	<i>Mole fraction</i>	<i>Expanded Uncertainty</i>	<i>St. Dev. Mol.</i>	<i>St. Dev. Mass</i>	<i>St. Dev. Compo.</i>
	x 10 ⁻⁶	x 10 ⁻⁶	x 10 ⁻⁶	x 10 ⁻⁶	x 10 ⁻⁶
H2	0.05	0.06	0.00	0.00	0.03
CH4	970340.95	5.23	1.87	1.65	0.78
H2O	0.99	1.12	0.00	0.00	0.56
CO	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00
N2	29657.63	5.13	1.87	1.65	0.59
C2H4	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
C2H6	0.05	0.06	0.00	0.00	0.03
O2	0.25	0.28	0.00	0.00	0.14
Ar	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
CO2	0.05	0.06	0.00	0.00	0.03
C3H6	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
C3H8	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
n-C4H10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
CnHm	0.03	0.03	0.00	0.00	0.01
i-C4H10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Autre 2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Autre 3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

**Etalonnage du
chromatographe
ISO 6975**

Mélanges
gravimétriques

Etalonnage du
chromatographe

Normalisation à Patm

Résultats d'étalonnage
- Modèle de fitting et $U_{fitting}$
- U (Area)
- U (melanges gravimétriques)

Chaîne ramifiée

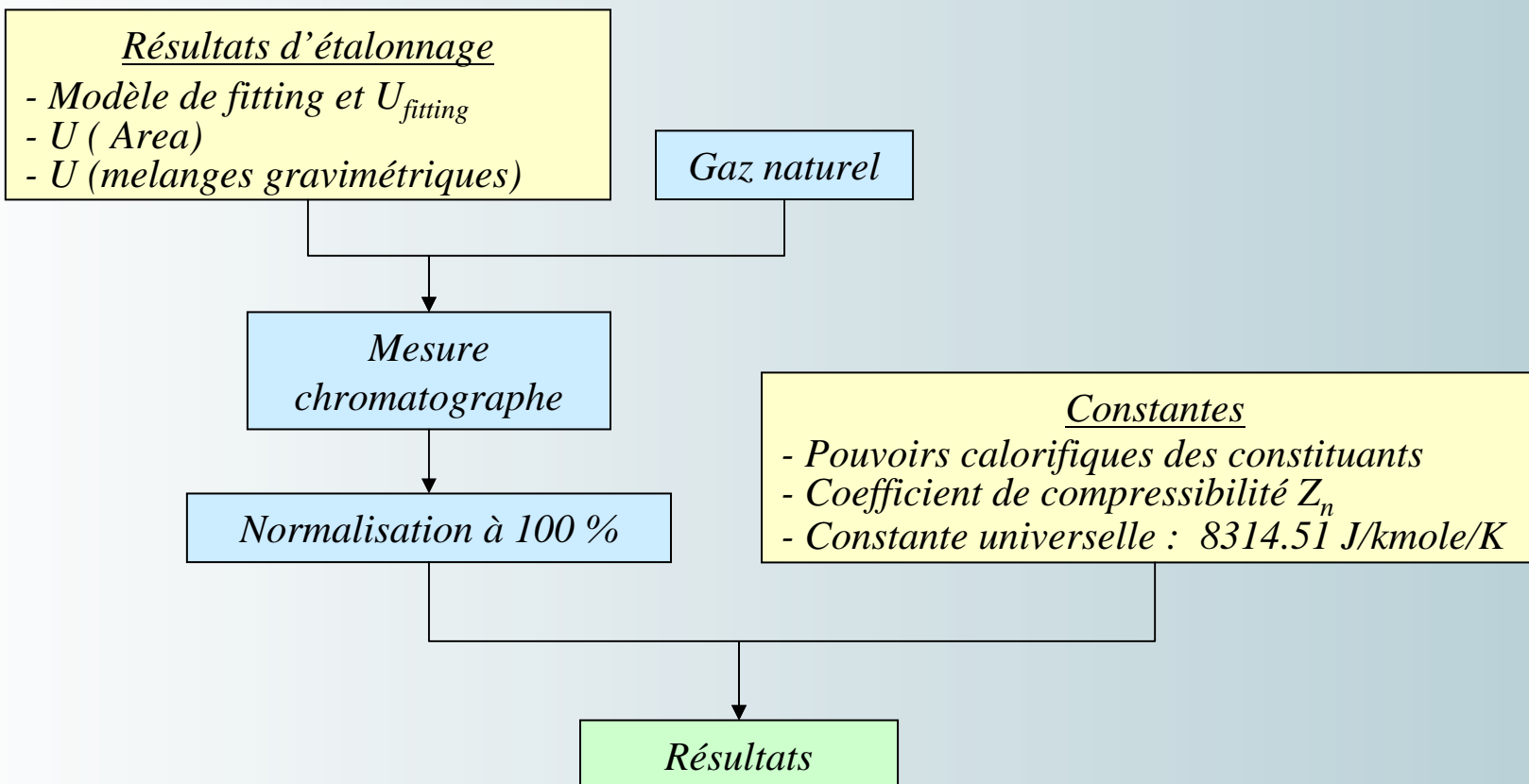
Résultats

No Cylinder	Gases Mixture	X (Ref) %	U(X) %	Patm bar	Aera -	Y(Aera st.) -
N4@dz68	nC4+C2+C1	1.82225	0.000635	1.0181	1205.5518	1199.81
N4@dz68	nC4+C2+C1	1.82225	0.000635	1.01805	1210.9127	1205.20
N4@dz68	nC4+C2+C1	1.82225	0.000635	1.01795	1210.9059	1205.31
n4@dz62	nC4+C2+C1	1.58759	0.000561	1.01817	1044.6101	1039.56
n4@dz62	nC4+C2+C1	1.58759	0.000561	1.01814	1052.6324	1047.58
n4@dz62	nC4+C2+C1	1.58759	0.000561	1.0181	1053.1123	1048.10
n4@dz57	nC4+C2+C1	0.75182	0.000298	1.01775	473.28247	471.19
n4@dz57	nC4+C2+C1	0.75182	0.000298	1.01768	477.08435	475.01
n4@dz57	nC4+C2+C1	0.75182	0.000298	1.01762	480.84372	478.78
n4@dz46	nC4+C2+C1	0.19478	0.000122	1.01731	122.8237	122.33
n4@dz46	nC4+C2+C1	0.19478	0.000122	1.01743	125.28597	124.77
n4@dz46	nC4+C2+C1	0.19478	0.000122	1.01755	126.14828	125.62
n4@dz55	nC4+C2+C1	0.47936	0.000212	1.01712	302.20477	301.05
n4@dz55	nC4+C2+C1	0.47936	0.000212	1.01707	302.22177	301.09
n4@dz55	nC4+C2+C1	0.47936	0.000212	1.01699	305.42725	304.30

Expanded Uncertainty on X (%)			U(X)=C1*X+C2	
C1	3.15E-04	C2	6.11E-05	
Linear regression			Area = AI*[n-C4]/(%)	
Degree	Ai	s(Ai)	Test	Test result
1	643.730	3.65	176.29	+
Degree of freedom				14
t coefficient for 95 % confidence level				2.145

**Détermination du
Pouvoir Calorifique
ISO 6975**

Chaîne ramifiée





***Détermination du
Pouvoir Calorifique
ISO 6975***

Résultats

<i>Physical properties</i>	<i>Units</i>	<i>Value</i>	<i>Uncertainty (2k)</i>
<i>Gross calorific value -Volumetric basis GCV</i>	<i>kJ/Nm³</i>	36454	29
<i>Low calorific value -Volumetric basis LCV</i>	<i>kJ/Nm³</i>	32914	29
<i>LCV/GVC</i>	-	0.9029	0.0005
<i>Molar Mass</i>	<i>kg/kmol</i>	18.71	0.02
<i>Molar Volume</i>	<i>Nm³/kmol</i>	22.36	0.01
<i>Compression factor</i>	-	0.9976	0.0005
<i>Relative density</i>	-	0.6473	0.0006
<i>Density</i>	<i>kg/Nm³</i>	0.8369	0.0008
<i>Wobbe index</i>	<i>kJ/Nm³</i>	45311	32
<i>Stoichiometric air-to-gas requirement</i>	<i>Nm³/Nm³</i>		
<i>H₂O combustion</i>	<i>kg/Nm³</i>		
<i>CO₂ Total combustion</i>	<i>Nm³/Nm³</i>		
REMARKS : Combustion at 25 °C - Metering at 0 °C and 101325 Pa			

Contraintes dans l'information

Multiplicateurs de Lagrange

Méthodologie générale

- Soit n observations **indépendantes** d'un ensemble de grandeurs

⇒ Grandeurs x_1^*, \dots, x_n^*

⇒ Incertitudes sur les grandeurs $U(x_1^*), \dots, U(x_n^*)$

- Soit q contraintes qui relient ces grandeurs

⇒ Grandeurs estimées x_1, \dots, x_n

⇒ Formulation des contraintes $C_1(x_i) = 0, \dots, C_q(x_i) = 0$

⇒ Nombre de degrés de liberté $v = n - q$

• Methodologie des « moindres carrés »

Maximum Likelihood

⇒ *Fonction à minimiser :*

$$F = \sum_{k=1}^q \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{C_k(x_i^*) - C_k(x_j, x_{i(\neq j)}^*)}{w_{C_k}^j} \right)^2 \right] + \sum_{k=1}^q \lambda_k C_k(x_i)$$

⇒ *Multiplicateurs de Lagrange :* $\lambda_1, \dots, \lambda_k$

⇒ *Nombre d'inconnues :* $n x_i$ et $q \lambda_k$ $n+q$

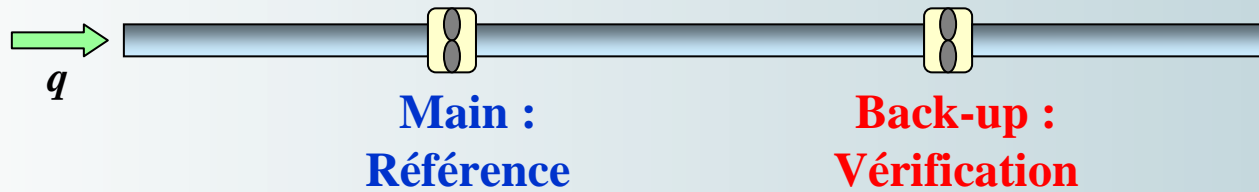
⇒ *Equations :* n équations $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$ q contraintes $\frac{\partial F}{\partial \lambda_k} = 0$

⇒ *Poids ? :* $w_{C_k}^j = \frac{\partial C_k}{\partial x_j} \Big|_{x_j=x_j^*} U(x_j^*)$

Détermination des grandeurs estimées x_j et $U(x_j)$



Exemple simple : Mesure de débit - Station de comptage



⇒ *Grandeurs observées* q_1^*, q_2^*

⇒ *Incertitudes sur les grandeurs observées* $U(q_1^*), U(q_2^*)$

⇒ *Grandeurs estimées* q_1, q_2

⇒ *Contrainte* $q_1 - q_2 = 0$

⇒ *Fonction « moindres carrés »*

$$F = \left(\frac{q_1 - q_1^*}{U(q_1^*)} \right)^2 + \left(\frac{q_2 - q_2^*}{U(q_2^*)} \right)^2 + \lambda(q_1 - q_2)$$

⇒ *Résultats :*

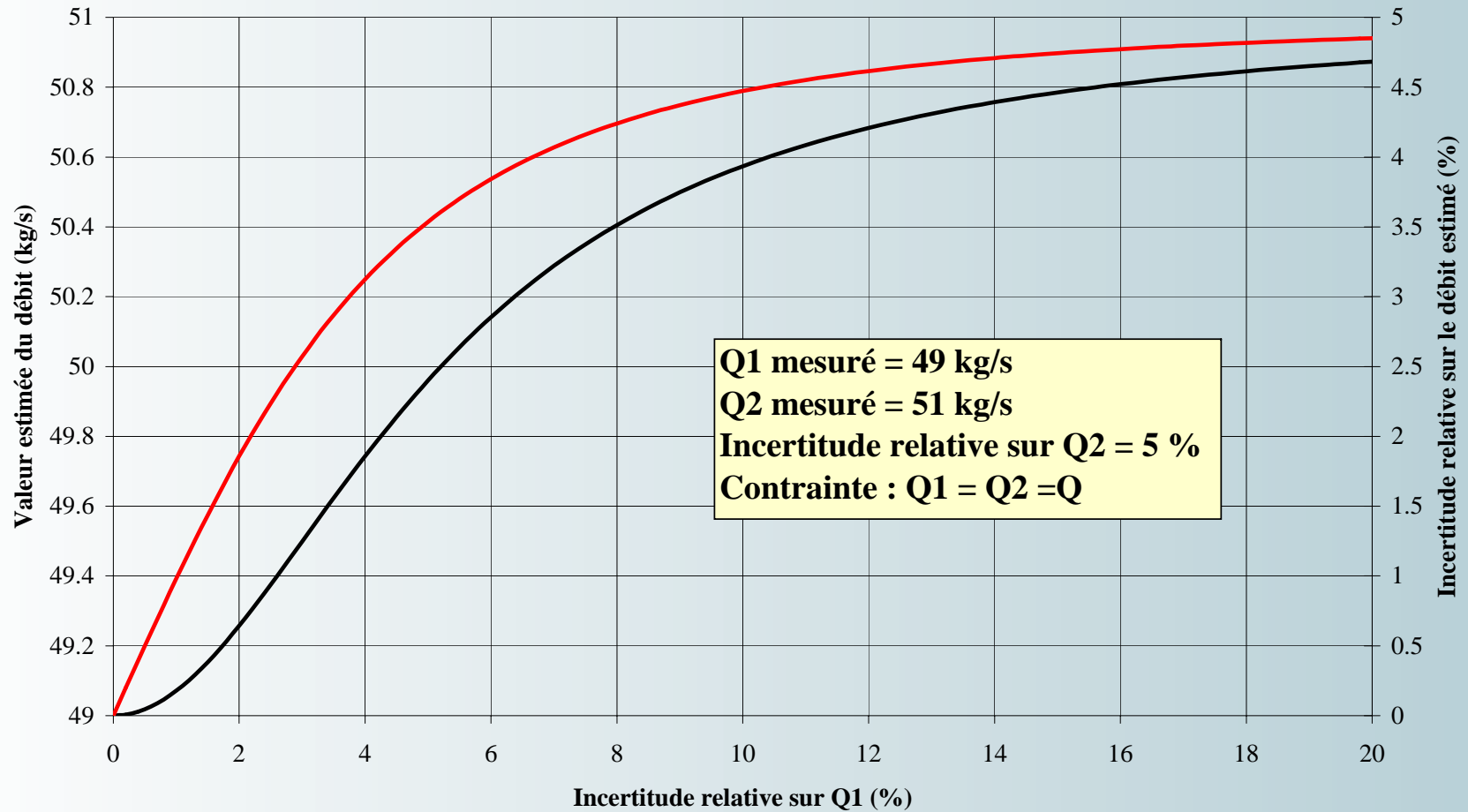
$$q = q_1 = q_2 = \frac{U(q_1^*)^2 q_2^* + U(q_2^*)^2 q_1^*}{U(q_1^*)^2 + U(q_2^*)^2}$$

$$U(q) = \frac{\sqrt{U(q_1^*)^4 U(q_2^*)^2 + U(q_2^*)^4 U(q_1^*)^2}}{U(q_1^*)^2 + U(q_2^*)^2}$$



Exemple chiffré : Mesure de débit - Station de comptage

Valeur estimée du débit et incertitude





Cas d'étude : Normalisation à 100 % des fractions molaires

⇒ *Grandeurs observées* x_i^*

⇒ *Incertitudes sur les grandeurs observées* $U(x_i^*)$

⇒ *Grandeurs estimées* x_i

⇒ *Contrainte* $\sum x_i - 1 = 0$

Modèles de fonction « moindres carrés »

$$F = \sum_{i=1}^n (x_i^* - x_i)^2 + \lambda \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

$$F = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^*} (x_i^* - x_i)^2 + \lambda \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

$$F = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i^* - x_i}{U(x_i^*)} \right)^2 + \lambda \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

Résultats

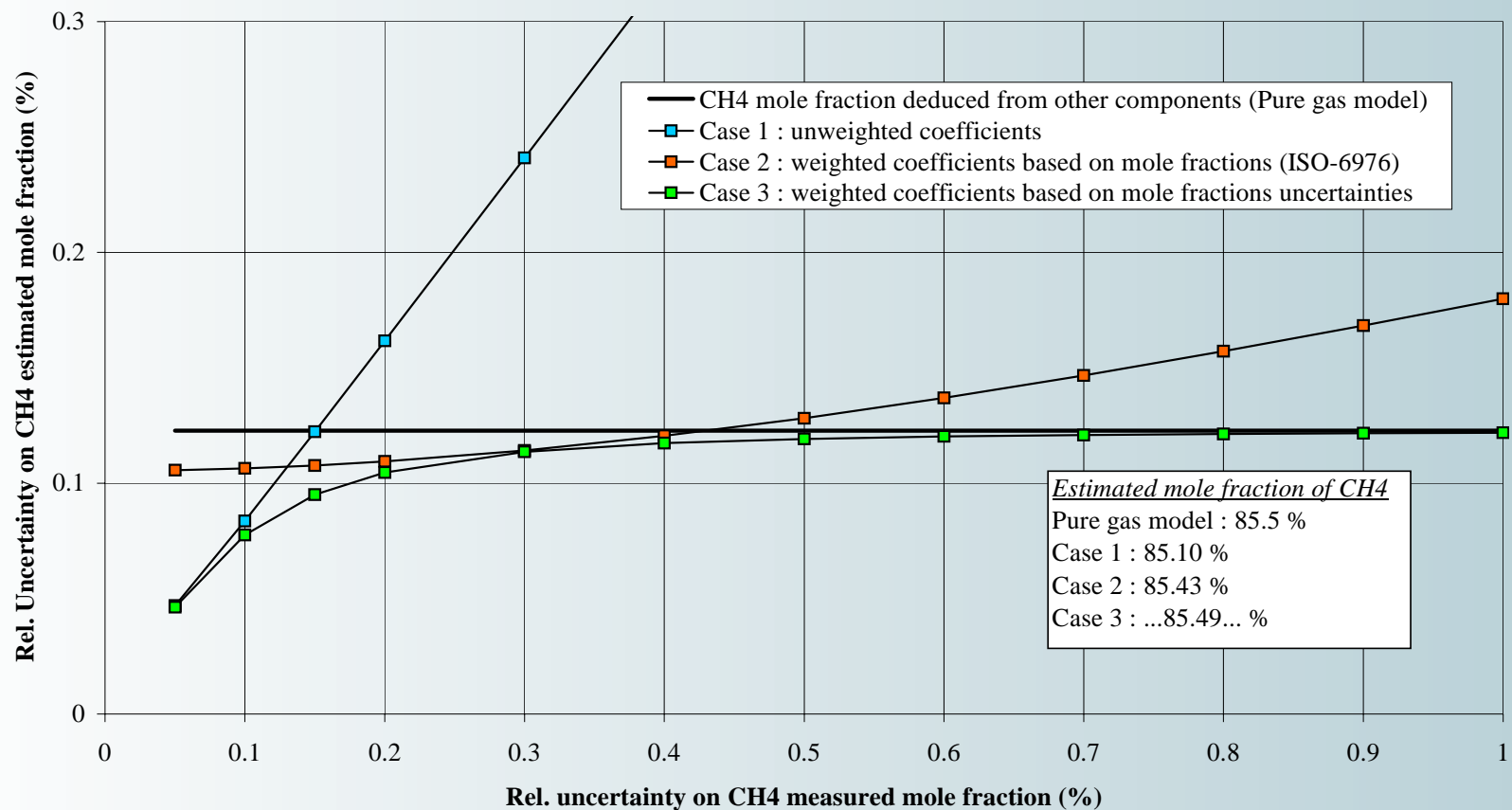
$$x_i = x_i^* + \frac{1 - \sum_{i=1}^n x_i^*}{n}$$

$$x_i = \frac{x_i^*}{\sum_{i=1}^n x_i^*}$$

$$x_i = x_i^* + \frac{U(x_i^*)^2 \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i^* \right)}{\sum_{i=1}^n U(x_i^*)^2}$$

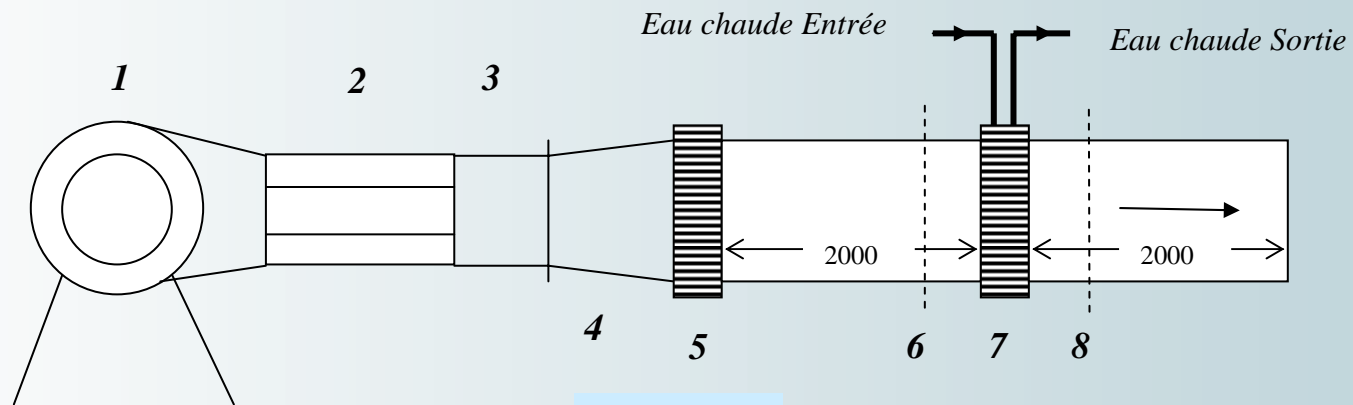
Cas d'étude : Normalisation à 100 % des fractions molaires

Relative uncertainty on CH₄ estimated mole fraction
Relative uncertainties on others components equal to 1 %





Cas d'étude : Essais de batteries de chauffe BTN



Légende

- 1 : Ventilateur.
- 2 : Redresseur croisillon « étoile » 2D (\varnothing 800)
- 4 : Divergent 750x750 \Rightarrow Dimension Batterie (900x1090) : longueur 1500
- 5 : Batterie servant de redresseur (supprimé pour les essais)
- 6 : Section de mesure Air/amont
- 7 : Batterie chaude à tester
- 8 : Section de mesure Air/aval



RESULTATS D'ESSAIS

SYNTHESE DES RESULTATS D'ESSAIS								
No Essai	qe (kg/s)	te,e (°C)	te,s (°C)	We (kW)	qa (kg/s)	ta,e (°C)	ta,s (°C)	Wa (kW)
Bat1E2	0.633	81.20	65.14	42.58	1.597	25.36	49.47	38.63
Bat1E1	0.626	81.48	61.81	51.61	2.608	24.86	44.22	50.65
Bat1E3	0.627	80.66	58.62	57.95	3.917	25.46	39.92	56.81
Bat1E4	0.668	79.76	62.77	62.03	1.852	19.88	45.31	60.04
Bat1E5	0.660	79.69	59.43	74.48	3.010	21.10	40.02	73.76
Bat1E6	0.655	79.43	56.86	83.00	4.312	21.28	36.09	82.81
Bat2E1	0.676	78.43	56.54	40.25	1.914	27.62	58.89	41.96
Bat2E2	0.670	78.32	51.77	50.29	2.946	28.14	53.10	52.69
Bat2E3	0.662	77.94	48.00	62.57	4.152	28.34	48.23	60.42
Bat3E1	0.663	79.26	64.77	47.54	1.931	21.52	43.19	47.23
Bat3E2	0.673	79.26	61.42	56.05	2.876	22.48	40.75	57.10
Bat3E3	0.665	78.76	57.07	61.88	4.024	22.26	37.76	64.04

MEILLEURE ESTIMATION - MULTIPLICATEUR DE LAGRANGE

Hypothèse : même ordre de grandeur des incertitudes sur les grandeurs

Contrainte : $W_e = W_a$ $q_e' c_{pe} (t_{e,e}' - t_{e,s}') - q_a' c_{pa} (t_{a,s}' - t_{a,e}') = 0$

Méthode : Multiplicateurs de Lagrange

Fonction F à minimiser pour toutes les grandeurs à estimer

$$F = \left[W_e - q_e' c_{pe} (t_{e,e} - t_{e,s}) \right]^2 + \left[W_e - q_e' c_{pe} (t_{e,e}' - t_{e,s}) \right]^2 + \left[W_e - q_e' c_{pe} (t_{e,e} - t_{e,s}') \right]^2 +$$

$$\left[W_a - q_a' c_{pa} (t_{a,e} - t_{a,s}) \right]^2 + \left[W_a - q_a' c_{pa} (t_{a,e}' - t_{a,s}) \right]^2 + \left[W_a - q_a' c_{pa} (t_{a,e} - t_{a,s}') \right]^2 +$$

$$\lambda \left[q_e' c_{pe} (t_{e,e}' - t_{e,s}) - q_a' c_{pa} (t_{a,s}' - t_{a,e}') \right]$$

RESULTATS D'ESSAIS : VALEURS ESTIMEES

GRANDEURS ESTIMEES								
No Essai	q_e' (kg/s)	$t_{e,e}'$ (°C)	$t_{e,s}'$ (°C)	q_a' (kg/s)	$t_{a,e}'$ (°C)	$t_{a,s}'$ (°C)	W' (kW)	ε (-)
Bat1E2	0.624	80.95	65.39	1.63	24.94	49.89	40.67	0.446
Bat1E1	0.624	81.42	61.87	2.62	24.80	44.28	51.12	0.345
Bat1E3	0.625	80.59	58.69	3.93	25.41	39.97	57.36	0.397
Bat1E4	0.667	79.74	62.79	1.85	19.85	45.34	47.40	0.426
Bat1E5	0.662	79.76	59.36	3.00	21.16	39.96	56.58	0.348
Bat1E6	0.659	79.56	56.73	4.29	21.36	36.01	63.01	0.392
Bat2E1	0.673	78.31	56.66	1.93	27.45	59.06	61.03	0.621
Bat2E2	0.669	78.27	51.82	2.95	28.10	53.14	74.14	0.527
Bat2E3	0.662	77.93	48.01	4.15	28.33	48.24	82.94	0.603
Bat3E1	0.668	79.36	64.67	1.92	21.67	43.04	41.12	0.371
Bat3E2	0.678	79.40	61.28	2.86	22.62	40.61	51.52	0.319
Bat3E3	0.669	78.89	56.94	4.00	22.35	37.67	61.51	0.388

Références et remerciements

Partie I: Les plans d'expérience

B. GOVAERTS, E. LE BOULENGE “Planification expérimentale”, 1996, Notes de cours

G. SADO, M-C SADO “De l'expérimentation à l'assurance de qualité” , Ed. Afnor, 1991

J. PARIS, JM ROLIN, L. SIMAR, B. GOVAERTS “Eléments de statistique utiles à la planification expérimentale”, 1993, Notes de cours

D. STEPPAN, J. WERNER, R. YEATER “Essential regression and experimental design for chemists and engineers”, 1998, + macro Excel

S. RAINER “Optimum design for multi-factor models” ,Ed. Springer, 1996

W.C. COCHRAN “Experimental design” ,Ed. Willey, 1992

G. BOX “Statistics for experimenters:an introduction to design, data analysis and model building” ,Ed. Willey, 1978



UCL

Université
catholique
de Louvain

Références et remerciements

N.C. BARFORD “Experimental measurements : precision, error and truth” Second edition, 1987

N. DRAPER, H. SMITH “Applied regression analysis” Third edition, 1998

R. WALPOLE, R. MYERS “Probability and statistics for engineers and scientists” 2d edition, 1989

“Méthode statistiques” Recueil de Normes, ISO 3, 1989

“Guide pour l’expression de l’incertitude de mesure “ First edition 1993, corrected and reprinted 1995, ISO 14216

“Expression of the Uncertainty of Measurement in calibration” EAL – R2 and EAL – R2 –S1, April 1997.

“Assessment of uncertainty in calibration and use of flow measurement devices. Part 1: Linear calibration relationships - Part 2: Non-linear calibration relationships” ISO 7066, 1988.

“Engineering Analysis of Experimental Data” ASHRAE Guideline 2-1986 (RA 96),1996

“Gas analysis – Preparation of calibration gas mixture – Gravimetric method” ISO 6142, 1999.

“Natural gas – Extended analysis – Gas-chromatograph method” ISO 6975, 1997

“Natural gas – Calculation of calorific values from composition” ISO 6976, 1995.

“IUPAC Commission on Atomic Weights”.

